6. Hausübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(abzugeben am Dienstag, 06.07.2010)

Aufgabe H16 *Bewegtes Elektron* (4 Punkte)

Ein ruhendes freies Elektron, das sich in einem Spin-Eigenzustand befindet gemäß $\frac{1}{2}\sigma_z \otimes \mathbb{1}_2 \, |\psi\rangle \; \doteq : \; S_z \, |\psi\rangle \; = \; +\frac{1}{2} \, |\psi\rangle$ (in Dirac-Basis), wird durch die Wellenfunktion

$$\langle \vec{r}, t | \, \psi \rangle \; \equiv \; \psi(\vec{r}, t) \; = \; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}$$

beschrieben. Finden Sie die Wellenfunktion eines freien Elektrons, das sich mit der Geschwindigkeit $+v$ in x-Richtung bewegt, indem Sie auf ein mit $-v$ relativ zum Ruhesystem bewegtes Koordinatensystem transformieren. Befindet sich das bewegte Elektron noch in einem Eigenzustand von S_z?

Hinweis:
Verwenden Sie $\psi'(x') = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}} \psi(x)$ aus der Vorlesung, und überlegen Sie sich, welches $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$ ist. Nennen Sie dies ω. Es gilt $\tanh \omega = -v$.

Aufgabe H17 *Elektron im homogenen Magnetfeld* (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Energieeigenwerte eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung (die sogenannten Landau-Niveaus), indem Sie aus der stationären Diracgleichung die „kleinen Komponenten" φ_b eliminieren und das Eigenwertproblem der „großen Komponenten" φ_a auf das eines eindimensionalen harmonischen Oszillators zurück führen.

Hinweise:
Setzen Sie $c = 1$. Benutzen Sie die Eichung $\vec{A} = xB\vec{e}_y$. Neben dem kanonischen Impuls $\vec{p}$ definiert man den „kinematischen Impuls" $\vec{\pi} := \vec{p} - e\vec{A}$. Zeigen Sie allgemein, dass die Beziehung $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}) = \vec{\pi}^2 - \hbar e \, \vec{\sigma}\cdot\vec{B}$ gilt, und setzen Sie dann das obige spezielle Vektorpotential ein. Machen Sie zur Lösung des Eigenwertproblems für φ_a einen geeigneten Produktansatz der Form $\varphi_a(\vec{x}) = u(x)g(y, z)$. Nehmen Sie für $g(y, z)$ Eigenfunktionen von p_y, p_z und σ_z.

Aufgabe H18 *Eindimensionales Streuproblem für polarisierte Spins* (6 Punkte)

Man betrachte das eindimensionale Streuproblem an der Potentialstufe

$$e\,\phi \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z < 0 \\ V_0 > 0 & \text{für} \quad z \geq 0 \end{cases}$$

mit Hilfe der Diracgleichung

$$\mathrm{i}\hbar\,\dot{\psi} \;=\; \Big(mc^2\beta \;+\; \tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}c\,\alpha^3\partial_3 \;+\; e\,\phi\Big)\,\psi\;.$$

Die einlaufende Welle für in positive z-Richtung polarisierte Spins lautet

$$\psi_e \;=\; A\begin{pmatrix}1\\0\\\eta\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \qquad \text{mit} \quad (\hbar\omega - e\phi)^2 - c^2\hbar^2k^2 \;=\; m^2c^4 \quad \text{und} \quad \eta \;:=\; \frac{\hbar\omega - mc^2}{c\hbar k}$$

und habe die (erhaltene) Energie $E \equiv \hbar\omega > V_0 + mc^2$. Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten $R = |\vec{j}_r|/|\vec{j}_e|$ und den Transmissionskoeffizienten $T = |\vec{j}_t|/|\vec{j}_e|$, wobei $\vec{j} = c\,\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$ die Stromdichte der einfallenden (e), reflektierten (r) bzw. transmittierten (t) Welle ist. Beachten Sie, dass k (und damit η) für ψ_t einen anderen Wert hat als für ψ_e und ψ_r.
Zeigen Sie, dass R und T im nichtrelativistischen Grenzfall in die Ergebnisse der Schrödinger-Theorie übergehen, nämlich

$$R = \frac{(1-\varrho_s)^2}{(1+\varrho_s)^2}\;, \quad T = \frac{4\varrho_s}{(1+\varrho_s)^2} \qquad \text{mit} \qquad \varrho_s \;:=\; \sqrt{(E_s - V_0)/E_s}\;, \quad E_s \;:=\; E - mc^2\;.$$

Erhöht oder erniedrigt die relativistische Korrektur den Transmissionskoeffizienten?

Anleitung:
Die Eigenzustände zu positiver ($\vec{\sigma} \uparrow\uparrow \vec{p}$) bzw. negativer ($\vec{\sigma} \uparrow\downarrow \vec{p}$) Helizität lauten

$$|+\rangle \;\doteq\; \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\\eta\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |-\rangle \;\doteq\; \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\\eta\end{pmatrix}\;.$$

Benutzen Sie als Ansatz für die reflektierte und transmittierte Welle eine Linearkombination von Eigenzuständen zu positiver und negativer Helizität mit entsprechender Phase und schließen Sie die Spinoren bei $z = 0$ stetig an. Achtung: Die Diracgleichung ist nur von erster Ordnung, also müssen die Ableitungen nicht passen.

Dies war die letzte Hausübung zu dieser Vorlesung ☺
Danke für's Mitmachen und viel Erfolg bei der Klausur!